MPSI 2024/2025 | DS n°3 (3h)

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

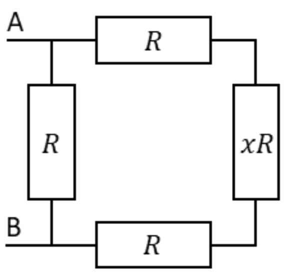
La calculatrice est autorisée

Consignes à suivre :

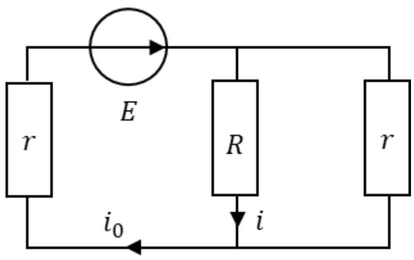
- Soigner la rédaction. Numéroter les questions (inutile d'écrire les titres).
- Soigner la présentation : aérer la copie, encadrer ou souligner les résultats.
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne sera pas prise en compte.
- Lire rapidement l'ensemble du sujet en début d'épreuve : les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
- Pour un exercice donné, traiter et rendre les questions dans l'ordre.

I - Questions ouvertes d'électrocinétique

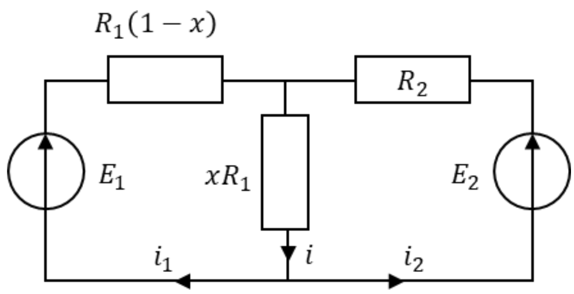
Les différentes sous-parties sont indépendantes.



Circuit n°1



Circuit n°2



Circuit n°3

I.1 - Résistance équivalente (circuit n°1)

1) Déterminer l'expression de la résistance équivalente R_{eq} entre les bornes A et B du circuit n°1.

2) Sachant que $x > 0$, déterminer la valeur de x pour que $R_{eq} = xR$.

I.2 - Détermination d'une intensité (circuit n°2)

3) Déterminer l'expression de la résistance équivalente R_{eq} entre les deux bornes du générateur du circuit n°2.

4) Déterminer l'intensité i_0 traversant le générateur en fonction de E et R_{eq}.

5) Déterminer l'intensité i traversant la résistance R, en fonction de i_0, r et R.

I.3 - Mesure d'une force électromotrice (circuit n°3)

6) Écrire deux lois des mailles et une loi des nœuds dans le circuit précédent.

7) Sachant que $0 < x < 1$, à quelle condition peut-on annuler l'intensité i_2 ?

-- Fin de la partie I --

II - Stratégies de charge d'un condensateur

Lorsqu'un condensateur est utilisé comme une batterie, la question de sa recharge se pose. L'énergie est prélevée sur le réseau électrique, et on souhaiterait que 100% de cette énergie soit transférée au condensateur.

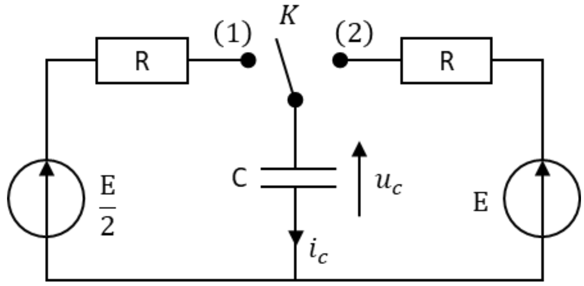
Nous allons montrer que ceci dépend de la stratégie de charge retenue.

On appelle « rendement de la charge du condensateur » le rapport entre l'énergie stockée par le condensateur à l'issue de la charge et de l'énergie fournie par le générateur au cours de cette charge :

$$\eta = \frac{\mathcal{E}_{stockée}}{\mathcal{E}_{fournie}}$$

8) De manière générale, la charge se fait à travers la résistance totale du circuit R. On note C la capacité du condensateur et E la tension finale à atteindre aux bornes du condensateur. Montrer par des arguments dimensionnels que l'expression du rendement η ne peut pas dépendre des valeurs de R, C ou E.

Dans les sous-parties II.1 et II.2 on raisonne sur le circuit ci-contre pour envisager deux méthodes de recharge, qui vont mener à deux valeurs de rendement différentes.



II.1 - Premier procédé de charge

L'interrupteur K est d'abord dans la position intermédiaire où il n'établit aucun contact. Le condensateur étant initialement déchargé, on bascule l'interrupteur K dans la position (2) à $t = 0$.

9) Établir l'équation différentielle portant sur $u_c(t)$. On la mettra sous la forme canonique, en faisant apparaitre une constante de temps τ dont on précisera l'expression.

10) Déterminer la valeur de $u_c(0^+)$ (juste après le basculement de l'interrupteur).

11) Résoudre l'équation différentielle obtenue précédemment.

12) Tracer l'allure de la solution $u_c(t)$.

13) Donner en fonction de C et de E l'expression de l'énergie stockée par le condensateur à la fin de sa charge.

14) Démontrer que le courant $i_c(t)$ s'écrit, pour tout $t \geq 0$:

$$i_c(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

15) Calculer alors l'énergie électrique fournie par le générateur sur l'ensemble de la charge.

16) Quelle est la valeur du rendement de la charge avec la méthode envisagée ? Peut-il être optimisé en changeant la résistance R ?

II.2 - Second procédé de charge

On souhaite utiliser une méthode qui permet d'améliorer le rendement de la charge. On réalise une charge en deux temps. Le condensateur est initialement déchargé. L'interrupteur K est d'abord dans la position intermédiaire où il n'établit aucun contact. Puis il est fermé en position (1) à $t = 0$. Lorsque le régime transitoire qui s'ensuit est achevé, l'interrupteur est basculé en position (2).

17) Déterminer l'expression de $u_c(t)$ pendant la première phase de la charge.

18) Déterminer en fonction de τ l'expression de l'instant t_1 pour lequel la tension u_c aux bornes du condensateur atteint 99 % de sa valeur finale au cours de cette première étape.

Dans la suite, on considérera que la charge est totalement achevée à cet instant t_1 (donc $u_c(t_1) \simeq E/2$), et qu'on passe en phase 2 (basculement de l'interrupteur en position (2)).

19) Exprimer la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur au cours de la deuxième phase de charge, **qui commence à l'instant t_1.**

20) Tracer l'allure de $u_c(t)$ en fonction du temps au cours de l'ensemble des deux phases de charge.

21) Exprimer l'intensité $i_c(t)$ qui traverse le condensateur pendant les deux phases de charge. On distinguera les cas en fonction de t.

22) Déterminer l'énergie électrique fournie par les deux générateurs pendant la charge.

23) En déduire le rendement pour cette nouvelle façon de procéder. Conclure quant aux avantages et désavantages par rapport à la première méthode.

II.3 - Généralisation à une charge en N étapes

La section II.2 montre que la charge fractionnée en deux étapes permet un meilleur rendement. Nous établissons ici l'expression du rendement pour un fractionnement en N étapes. Notons $t_0 = 0$ l'instant initial où le condensateur est déchargé. La première étape a lieu de t_0 à $t_1 = 5\tau$, par un générateur de tension E/N, à travers une résistance R.

De manière générale, l'étape numéro k de la charge ($k = 1$ à N) a lieu de t_{k-1} à t_k (avec : $t_k = k \times 5\tau$), par un générateur de tension kE/N, à travers une résistance R.

Au début de l'étape k, $u_c(t_{k-1}) = (k-1)E/N$, et à la fin de l'étape k, $u_c(t_k) = kE/N$.

24) Lors de l'étape k de la charge, déterminer (notamment en fonction de k et de N) :

- l'équation différentielle suivie par la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur ;
- l'expression de sa solution $u_c(t)$;
- l'expression de l'intensité $i_c(t)$ traversant le condensateur ;
- l'expression de l'énergie fournie par le générateur.

25) En déduire l'expression de l'énergie fournie par le générateur lors de l'ensemble de la charge.

26) Montrer enfin que le rendement de la charge en N étapes s'écrit :

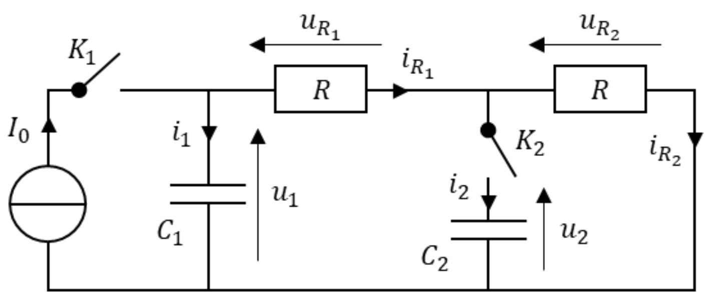
$$\eta = \frac{N}{N+1}$$

Déterminer la valeur de N permetant d'avoir un rendement de 99 %.

--- Fin de la partie II ---

III - Circuite à deux condensateurs

On considère le circuit ci-dessous.



Le circuit étant au repos (toutes les grandeurs nulles pour $t < 0$), on ferme l'interrupteur K_1 en $t = 0$. Le générateur idéal de courant impose alors $I_0 = cte$ dans sa branche pour tout $t \geq 0$. On rappelle que la tension la tension aux bornes d'un générateur de courant peut prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{R}$.

Dans un premier temps, le condensateur C_2 est déconnecté du circuit (interrupteur K_2 ouvert).

27) Représenter le circuit équivalent en régime permanent, lorsque $t \to \infty$ et en déduire $u_{1,\infty}$, la valeur de u_1 lorsque $t \to \infty$.

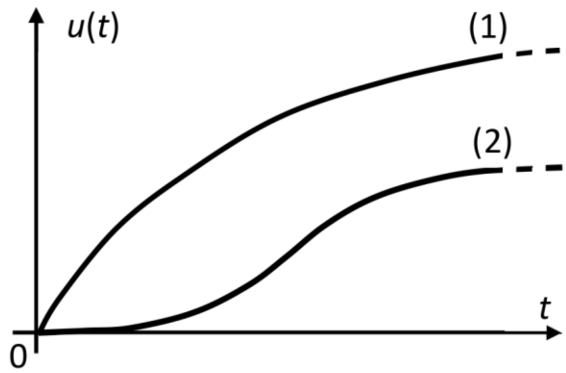
28) Quelle est la valeur de $u_1(t = 0^+)$? En déduire la valeur des différentes intensités en $t = 0^+$.

29) Établir et résoudre l'équation différentielle à laquelle obéit $u_1(t > 0)$, en précisant la durée caractéristique de l'évolution.

On reprend l'étude depuis le début. Cette fois, l'interrupteur K_2 est initialement fermé. Le circuit étant au repos (toutes les grandeurs nulles pour $t < 0$), on ferme l'interrupteur K_1 en $t = 0$. Le générateur idéal de courant impose alors $I_0 = cte$ dans sa branche pour tout $t \geq 0$.

30) Représenter le circuit équivalent en régime permanent, lorsque $t \to \infty$. En déduire les tensions $u_{1,\infty}$ et $u_{2,\infty}$. Quelle sera alors l'énergie stockée dans le circuit ?

31) Montrer que $i_{R_1} = i_{R_2}$ à $t = 0^+$. En déduire les intensités dans les condensateurs à $t = 0^+$, et identifie ainsi les courbes représentant $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sur le graphique ci-dessous.



--- Fin de la partie III ---